Corrigé de l'examen 1

Question #1 : (1 point)

Choisir la fraction qui correspond à la simplification de $\frac{3x-6}{x^2-3x+2}$, xєR \ {1; 2} :

a) $\frac{3}{x+2}$, x є R \ {-2} ☐

b) $\frac{1}{x-2}$, x є R \ {2} ☐

c) $\mathbf{\frac{3}{x-1}}$ **, x є R \ {1}** ☒

d) $\frac{1}{x-1}$, x є R \ {1}. ☐

La bonne réponse est c. (1point)

Question #2 : (1 point)

Choisir la bonne réponse qui correspond à la factorisation de $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, x є R :

a) $(x^2 + 1)(x - 1)(2x - 1)$, x є R ☐

b) $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$, x є R ☐

c) $\mathbf{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$**, x є R** ☒

d) $(x + 1)^2(x - 1)^2$, x є R. ☐

La réponse est c. (1point)

Question #3 : (1 point)

Dans la fonction $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, x є R la valeur $-\frac{1}{3}$ correspond à un :

A. Maximum ☐

B. Minimum ☒

La bonne réponse est B. (1point)

Question #4 : (1 point)

Déterminer si les trois points A(-3,7), B(1,-1) et C(17, -33) sont situés sur une même droite.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
On calcule la pente d'une droite déterminée par deux points: $m_{AB} = \frac{yB-yA}{xB-xA} = \frac{-1-7}{1-(-3)} = \frac{-8}{4} = -2$	0.25p. Pour avoir connaître la formule de calcule de la pente d'une droite déterminée par deux points connus. 0.25p. Pour avoir trouvé : $m_{AB.}$ 0.25p. Pour avoir trouvé : $m_{AC.}$ 0.25p. Pour avoir justifier l'égalité des

$m_{AC} = \frac{yC-yA}{xC-xA} = \frac{-33-7}{17-(-3)} = \frac{-40}{20}$ = -2 $m_{AB} = m_{AC} \rightarrow$ (A–B–C) ou A є BC	pentes des droites AB et AC qui explique la colinéarité de points A,B et C.

Question #5 : (1point)

Soit les fonctions f(x) = 4 – 5x, g(x) =$\sqrt{x+1}$.

Déterminer : a) (fog)(x) et dom(fog).

b) (gof)(x) et dom(gof).

Réponse :

Solutions	Distribution des points
En partant de la définition de la composition des fonctions on (fog)(x) = f(g(x)) si et seulement si g(x) є domf (gof)(x) = g(f(x)) si et seulement si f(x) є domg (fog)(x) = 4- 5g(x) = 4 - 5$\sqrt{x+1}$, x + 1 ≥ 0 donc x ≥ -1, x є]-1, +∞(. (gof)(x) = $\sqrt{f(x)+1} = \sqrt{(4-5x)+1}$ =$\sqrt{5-5x}$ si et seulement si 5 – 5x ≥ 0, 5x ≤ 5, x ≤ 1 donc, x є)-∞, 1[.	0.25p. Pour connaitre la définition des fonctions composées. 0.25p. Pour avoir trouvé la première fonction composée et son domaine de définition. 0.25p. Pour avoir trouvé la deuxième fonction composée. 0.25p. Pour la détermination du domaine de définition de la deuxième fonction composée.

Question #6 : (1point)

Soit les fonctions réelles définies par :

a) f(x) = 5x - 3, x є R

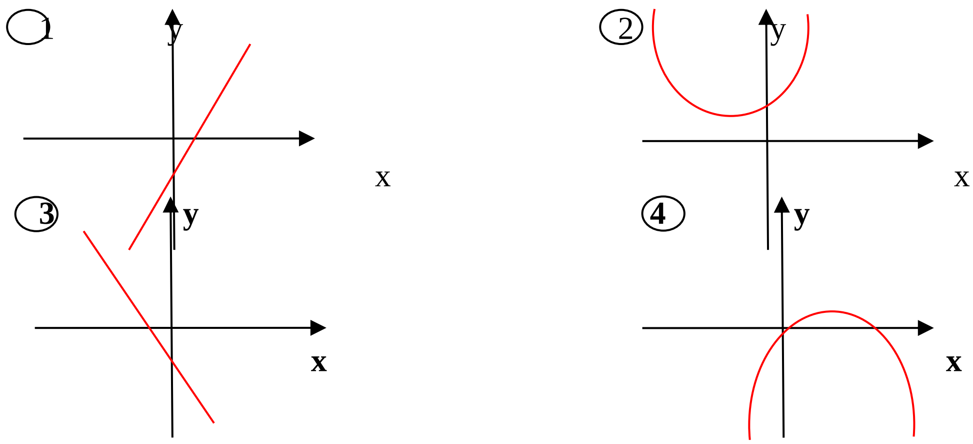
b) g(x) = 2x – x^2, x є R

c) h(x) = $(x + 1)^2$ + 1, x є R

d) k(x) = - x - 1, x є R

a	D_1
b	D_4
c	D_3
d	D_1
e	D_2

Mettre en relation chacune des fonctions ci-dessus à sa représentation graphique :



Question #7 : (1 point)

Parmi les droites ci-contre, indiquer celle dont la pente est :

a) positive

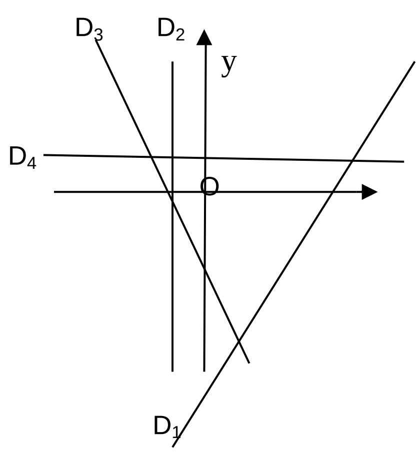
b) nulle

c) négative

d) la plus grande

e) non définie

a	D_1
b	D_4
c	D_3
d	D_1
e	D_2



Solutions	Distribution des points
Il s'agit de 5 associations.	Pour chaque correspondance correcte 0.2p. seront allouée.

Question #8: (1 point)

Soit la fonction f(x) = 3 – | 4 – 2x|.

a) Déterminer le domaine de définition de f(x).

Réponse : R

b) Définir la fonction f(x) par parties.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
Premièrement, on doit appliquer la définition de la fonction valeur absolue : | 4 – 2x | $=\begin{cases} -(4-2x) \text{ si et seulement si } 4-2x<0 \\ 4-2x \text{ si et seulement si } 4-2x \gg 0 \end{cases}$, donc, on obtient : $= \begin{cases} 2x-4 \text{ si } x \in)2,+\infty(\\ -2x+4 \text{ si } x \in)-\infty,2[\end{cases}$. Finalement on peut identifier la fonction : f(x) = $\begin{cases} 3-(2x-4) \text{ si } x \in)2,+\infty(\\ 3-(-2x+4) \text{ si } x \in)-\infty,2[\end{cases}$ f(x) = $\begin{cases} -2x+7 \text{ si } x \in)2,+\infty(\\ 2x-1 \text{ si } x \in)-\infty,2[\end{cases}$	0.1p. Pour bien determiner le domf. 0.4p. Pour savoir appliquer la formule de la valeur absolue d'une fonction. 0.25p. Pour trouver la fonction et le domaine de la fonction dans le premier cas. 0.25p. Pour trouver la fonction et le domaine de la fonction dans le deuxième cas.

Question #9 : (1 point)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions, par une brève démarche :

a) f(x) = $\frac{\sqrt{7x^2+1}}{2x^2+7x-4}$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{25-x^2}}$.

Réponse:

<table>
<tr><th>Solutions</th><th>Distribution des points</th></tr>
<tr><td>
Étant donné que nos fonctions sont fonctions composées, pour chaque fonction on détermine le domaine de définition. Pour f(x) on a les conditions : 1) la fonction $\sqrt{7x^2+1}$ existe $\forall x \epsilon$ R
parce que $7x^2 + 1 > 0$, $\forall x \epsilon$ R donc domf = R
2) la valeur de la fonction au dénominateur doit être différente de zéro donc, $2x^2 + 7x - 4 \neq 0$. On résous l'équation : $2x^2 + 7x - 4 = 0$, Le discriminant $\Delta = 7^2 - 4*2*(-4) = = 49 + 32 = 81$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-9}{4} = -4$ et
$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2}$ donc,
le domaine de définition de f(x) est :
$x \epsilon R \backslash \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$, la réponse est domf = $)-\infty, -4(\cup$
$)-4, \frac{1}{2}(\cup)\frac{1}{2}, +\infty($.
3) on se pose la condition : $\frac{1-x}{25-x^2} \geq 0$.
Pour la résolution d'une telle inéquation on réalise le tableau de signes suivant :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -5   1   5 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>1-x</td><td>∞ +   +   6   +   +0 -   -4 -   - ∞</td></tr>
<tr><td>$25-x^2$</td><td>-   -   - 0   +   +   +   0- - $-\infty$</td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>-   -   -   ǀ ++ +0 −   − ǀ + + $+\infty$</td></tr>
</table>
Finalement, le domg=$)-5,1[\cup)5, +\infty($.
</td><td>
a) 0.25p. Pour avoir démontré que la fonction au numérateur existe pour toutes les valeurs réelles de x.
0.25p. Finalement, pour trouver le domf, en appliquant correctement la condition de base et en résolvant une équation deuxième degré.

b) 0.1p. Pour trouver le signe de la fonction située au numérateur
0.2p. Pour trouver le signe de la fonction au dénominateur
0.2p. Pour déterminer le domg en appliquant la procédure de déterminer le signe d'une fraction algébrique.
</td></tr>
</table>

Question #10 : (1point)

Soit la fonction f(x) = $3\left[\frac{x}{2}\right]$ définie pour -5 ≤ x < 4.

Déterminer l'image de la fonction f(x).

Réponse :

Solutions	Distribution des points
Pour déterminer l'image de $\left[\frac{x}{2}\right]$ on doit résoudre la double inégalité en divisant par 2 : $\frac{-5}{2} \leq \frac{x}{2} < 2$. On déduire que pour : $-2.5 \leq \frac{x}{2} < -2$, $\left[\frac{x}{2}\right] = -3$, $-2 \leq \frac{x}{2} < -1$, $\left[\frac{x}{2}\right] = -2$, $-1 \leq \frac{x}{2} < 0$, $\left[\frac{x}{2}\right] = -1$, $0 \leq \frac{x}{2} < 1$, $\left[\frac{x}{2}\right] = 0$, $1 \leq \frac{x}{2} < 2$, $\left[\frac{x}{2}\right] = 1$. On constate que $3\left[\frac{x}{2}\right]$ peut prendre les valeurs -9, -6, -3, 0 et 3. Par conséquence f(x) prendre les valeurs entières en dessous mentionnées. Donc, l'image de f(x) représente l'ensemble$\{-9, -6, -3, 0, 3\}$.	0.2p. Pour la résolution de la double inégalité. 0.5p. Pour établir les intervalles de la variable de la fonction quand on change sa valeur entière, c'est-à-dire domf. 0.3p. Pour l'écriture de la fonction avec ses valeurs et l'image de f(x).

Question #11 : (0.5 point)

Soit les fonctions suivantes :

a) f(x) = $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 + \pi$

b) g(x) = $\frac{x^2+1}{x+1}$

c) h(t) = $(-5t^3 + 2t + 1)(6t-2t^2)$

d) l(u) = $(3u - 8)(2u^4 + 6)^{1/4}$

1) Identifier les fonctions polynomiales.

Réponse : f(x),h(t)……………………………………………………………………………………………

2) Déterminer leur degré.

Réponse : 4 et 5……………………………………………………………………………………………

Question #12 : (1 point)

Soit la fonction rationnelle f(x) = $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2x-1}{3x+1}$, dom f = R\ $\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

Calculer les zéros de la fonction f(x).

Réponse :

Solutions	Distribution des points
L'étudiant doit connaitre le fait que les zéros d'une fonction sont les solutions de l'équation f(x) = 0 déterminées sur le domaine de définition de la fonction f(x).(domf) On résout l'équation : $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2x-1}{3x+1} = 0$, x ϵ R\ $\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$, On amène au dénominateur commun les deux fractions algébriques et on multiplie les deux membres de l'équation avec celui-ci. (2X + 1)(3X + 1) – (2X – 1)(3X – 1) = 0. Puis, on élimine les parenthèses et on réduit les facteurs semblables. $6x^2 + 2x + 3x + 1 - 6x^2 + 2x + 3x - 1 = 0$, 10x = 0 d'où x = 0. On déduit que x = 0 est l'unique solution de l'équation car elle appartient au domf. Elle représente le seul zéro de notre fonction.	0.4p. Pour le bon raisonnement que les zéros d'une fonction se sont retrouvés parmi les solutions de l'équation f(x) = 0, x ϵ domf. 0.2p. Pour l'amplification des fractions et l'élimination des dénominateurs des fractions. 0.2p. Pour éliminer les parenthèses, pour la réduction des termes semblables. 0.2p. Pour vérifier que la valeur unique obtenue appartient au domf et l'écriture de la solution.

Question #13 : (1 point)

Soit l'équation $\sqrt{5+x^2}$ + x^2+ 1 = 0.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation.

Réponse : 0……………………………………………………………………………………………………..

Question #14 : (1 point)

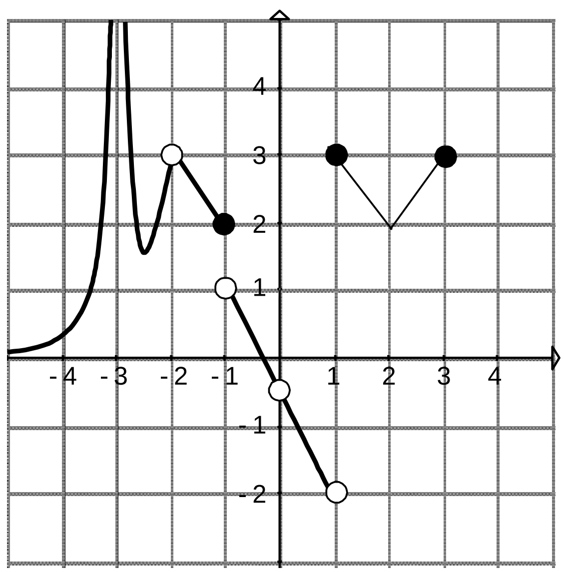
À partir de la représentation graphique de la fonction ci-dessous, analyser l'existence de chacune des limites dans $\overline{R}$.

a) $\lim_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$



Réponse :

Solutions	**Distribution des points**
a)La résolution de cette question suppose la connaissance de la notion de limite ponctuelle d'une fonction en faisant une attentive analyse de l'existence pour chacune des limites présentées. Aussi, en regardant sur le graphique de la fonction, l'étudiant ne doit pas oublier qu'on discute ces problèmes sur $\overline{R}$ **,** donc on donne sens et on peut discuter sur l'existence des limites au -∞ et au +∞. En analysant l'existence pour	a) 0.25p. Pour les calculs des limites latérales égales et finîtes, en analysant son existence (sur le graphique de la fonction). b) 0.25p. Pour le calcul correct de la limite et l'observation que -∞ appartient au domf. c) 0.25p. Pour les calculs des limites latérales qui ne sont pas égales et l'analyse de l'existence (non). d) 0.25p.

$\lim_{x\to -2} f(x)$ on est obligé de vérifier l'existence des limites latérales égales et finîtes. Donc, on va vérifier si la limite latérale gauche notée : $\lim_{x\to -2-} f(x)$ est égale à la limite latérale droite notée $\lim_{x\to -2+} f(x)$ .Comme $\lim_{x\to -2-} f(x)$ = 3 et $\lim_{x\to -2+} f(x)$ =3, on a des limites latérales égales et finites donc la limita $\lim_{x\to -2} f(x)$ = 3 et elle existe. b) En prenant la deuxième limite, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ = 0, elle existe parce que la fonction a sa représentation pour -∞, sa limite est finite et la plus essentielle chose est que le domaine de la fonction $\overline{R}$ contient le point dans lequel on calcule la limite. c) Analogue, on déduit que la troisième limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas parce que la limite gauche $\lim_{x\to 1-} f(x)$ = -2 est différente de la limite droite $\lim_{x\to 1+} f(x)$ = 3 d) En dernier, on ne peut pas parler de l'existence de la limite $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ donc, on affirme que cette limite $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ n'existe pas parce que le domaine de la fonction ne contient pas le point +∞.	

Question #15 : (1point)

Soit : $\lim_{x\to 2} \frac{\boldsymbol{x-\sqrt{3x-2}}}{\boldsymbol{x-2}}$

a) Analyser sa forme de l'indétermination.

Réponse : $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

b) Calculer algébriquement la limite.

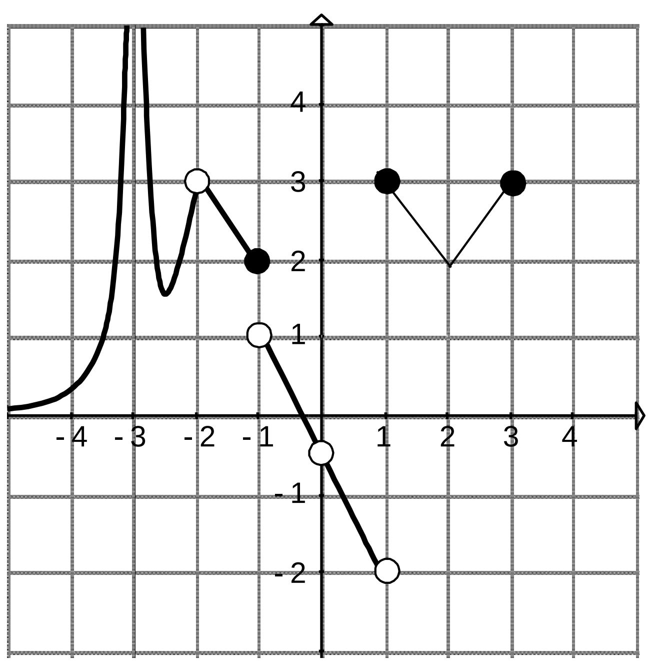
Réponse :

Solutions	Distribution des points
Il s'agit de l'enlèvement de l'indétermination dans laquelle existe un radical donc, on est obligé d'utiliser la conjugué de la fonction qui se trouve	a) 0.1p. Pour indiquer l'indétermination correcte. b) 0.3p. Pour trouver la conjugué. 0.3p. Pour les calculs suivants : différence de

au numérateur : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}=$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}$ (une différence de deux carrés au numérateur) $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}$ **(**la décomposition d'une fonction quadratique) **=** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}$ (on pourra simplifier) **=** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+\sqrt{3x-2})}$ **=** $\frac{1}{4}$	deux carrés, décomposition de la fonction quadratique. 0.2p. Pour avoir simplifié la fraction. 0.1p. Pour finaliser le calcul et pour vérifier le résultat.

<u>Question #16 : (1point)</u>

À partir de la représentation graphique de la fonction ci-dessous, identifier tous les points de discontinuité de la fonction.



Réponse : -1,1…………………………………………………………………………

Question #17 : (1point)

Soit la fonction : f(x) = $\begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{2-x}{3x} \text{ si } 1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

a) Analyser si la fonction est continue en x = 2. Justifier à l'aide d'une brève démarche.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
a)Pour analyser la continuité de la fonction dans un point, on doit vérifier l'existence de la limite dans ce point, si les limites latérales finies sont égales avec la valeur de la fonction dans ce point. C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 2+}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 2-}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 2}$ f(x) = f(2) є R (finite).On a $\lim\limits_{x\to 2+}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{x-2} = 0$, $\lim\limits_{x\to 2-}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{2-x}{3x} = \frac{2-2}{-6} = 0 = f(2)$ donc f(x) est continue en x=2. b) On calcule $\lim\limits_{x\to 1-}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 1-}$ (x^2-1) = 0, $\lim\limits_{x\to 1+}$ f(x) = $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{2-x}{3x}$ **=- $\frac{1}{3}$,** on résulte que notre fonction n'a pas limite en x=1 donc, la fonction n'est pas continue en x =1.	a) 0.2p. Pour le calcul f(2). 0.2p. Pour le calcul de la limite latérale gauche $\lim\limits_{x\to 2-}$ f(x). 0.2p. Pour le calcul de la limite latérale droite $\lim\limits_{x\to 2+}$ f(x). 0.4p. Pour l'interprétation et la finalisation de la démonstration. b) 0.2p. Pour le calcul f(1). 0.2p. Pour le calcul de la limite latérale gauche $\lim\limits_{x\to 1-}$ f(x). 0.2p. Pour le calcul de la limite latérale droite $\lim\limits_{x\to 1+}$ f(x). 0.4p. Pour l'interprétation et la finalisation de la démonstration

Question #18 : (2 point)

Soit la fonction f(x) = $\frac{1}{27x^4-45x^3-93x^2+185x-50}$, x є R.

Analyser la continuité de f(x) sur l'intervalle]-1, 1[à l'aide du théorème de la valeur intermédiaire.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
Étant donné l'application du théorème de la valeur intermédiaire, il est obligatoire d'établir si les conditions du théorème sont satisfaites. En supposant que la fonction est continue sur l'intervalle]-1, 1[et f(-1) = $\frac{1}{27+45-93-185-50}$ =$\frac{1}{-214}$	0.4p. Pour connaître la méthode de réduire à l'absurde et pour satisfaire aux conditions du corolaire de la valeur intermédiaire. 0.4p. Pour appliquer les conditions du théorème et sa conséquence. 0.2p. Pour la finalité du raisonnement.

=- $\frac{1}{214}$, f(1) = $\frac{1}{27-45-93+185-50}$ =+ $\frac{1}{24}$.On observe que f(-1)<0 et f(1)>0.Parce que notre supposition nous permet d'appliquer le théorème de la valeur intermédiaire, résulte immédiatement qu'il existe une valeur c є]-1, 1[pour laquelle f(c) = 0 donc, dans notre cas : il existe c є]-1, 1[pour que f(c) = $\frac{1}{27c^4-45c^3-93c^2-185c-50}$ =0 mais cette chose est absurde étant donné le fait que cette fraction obtenue a le numérateur qui est toujours différent de zéro. Donc, la supposition est false. Par conséquence notre fonction n'est pas continue sur cet intervalle.	

Question #19 : (1 point)

Soit la fonction f(x) = $2x^2 - 7x + 4$, x є R.

Calculer : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
Le calcul du taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle [x, x + Δx], $\Delta x > 0$ par définition $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$ =$\frac{2(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+4-2x^2-7x-4}{\Delta x}$ = $\frac{2x^2+4x\Delta x+2\Delta^2 x-7x-7\Delta x+4-2x^2+7x-4}{\Delta x}$ =$\frac{4x\Delta x-7\Delta x+2\Delta^2 x}{\Delta x}$ =(factorisation)=$\frac{\Delta x(4x-7+\Delta x)}{\Delta x}$ =(simplification)= 4x -7 +Δx.	0.3p. Pour connaître la formule de calcul du taux de variation moyen. 0.3p. Pour les calculs jusqu'à la factorisation. 0.3p. Pour la factorisation et la simplification. 0.1p. Pour la finalité du calcul.

Question #20: (1 point)

La position x, en fonction du temps t, d'un objet lancé verticalement vers le haut, est donnée par

$x(t) = -5t^2 + 15t + 22$, où t est en secondes et x en mètres.

Déterminer la vitesse moyenne de l'objet après 2 secondes du lancement, en prenant en considération le moment initial t = 0.

Réponse :

Solutions	Distribution des points
Par définition la vitesse moyenne représente le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{xfinal - xinitial}{tfinal - tinitial}$. Dans notre situation $t_{final} = 2$ et $t_{initial} = 0$ donc, $\frac{\Delta x}{\Delta t} == \frac{x(2)-x(0)}{2-0} = \frac{-20+30+22-22}{2} = 5\frac{m}{s}$ =18km/h.	0.5p. Pour connaître la formule de calcul. 0.5p. Pour les calculs et la vérification.