Exemple 6. Soit la matrice ci-dessus : $\begin{pmatrix} 1-2-5 \\ 0-1-3 \\ 0-4-2 \end{pmatrix}$. Trouvez les cofacteurs de cette matrice qui ne contiennent pas les éléments de la première ligne.

Les cofacteurs sont les déterminants d'ordre 2, affectés du signe $(-1)^{i+j}$:

$(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix}$,$(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et $(-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-4 \end{pmatrix}$. On identifie seulement les cofacteurs sans que nous fassions leurs calculs.

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice A, à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur : A = $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Sa résolution :

étape 1 : la matrice est bien carrée, non

étape 2: la matrice a une colonne ou une ligne nulle, non

étape 3: s'assurer qu'il n'y a pas de ligne (ou colonne) qui est le produit d'une autre ligne (ou colonne), non

étape 4 : choisir la ligne ou la colonne qui est la plus facile à résoudre, puis écrire ses éléments, ligne 1

étape 5 : trouver les mineurs des éléments de cette ligne (ou colonne) :

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

étape 6 : trouver les cofacteurs des éléments de cette ligne (ou colonne) :

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$

étape 7 : résoudre. Déterminant $= \sum^{n} élémentX(\text{mineur})Xcofacteur$, où n = 3 dimension de la matrice :

$= (-1) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} + (-2) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} + (-3) \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$

$= (-1)\,(8) - (-2)\,(10) + (-3)\,(21) = -51$