Plan de leçon

1. Contexte du cours et de la séquence du cours.

Le cours d'« Algèbre linéaire et géométrie vectorielle» (sigle : 201-NYC-05 du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport) est un cours d'algèbre donné par le département de Mathématiques.
L'objectif du cours est d'appliquer les méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problèmes.
Il s'agit d'une trentaine d'étudiants, garçons et filles, qui ont dix-sept, dix-huit ans et, qui ont tous des motivations différentes pour suivre ce cours
Le cours dont la séquence fait partie, est présenté à l'étudiant qui suit le profil « Sciences de la nature » ou le profil « Sciences humaines ».
Cet apprentissage est inscrit dans la première session, la première semaine de l'année.
La séquence « Calcul du déterminant à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur » fait partie du cours « Algèbre linéaire et géométrie vectorielle » et elle se donne dans la troisième semaine de la première session.

2. Les objectifs de la séquence d'apprentissage

2.1. Les objectifs généraux de la séquence
2.1.1. Au point de vue des connaissances, l'élève sera capable de savoir utiliser correctement les définitions, la terminologie, le symbolisme et les conventions relatives aux concepts de matrice et de déterminant.
2.1.2. Au point de des habiletés, l'élève sera capable d'appliquer des algorithmes aux opérations de matrices et de vecteurs, au calcul d'un déterminant.
2.1.3. Au point de vue des attitudes, ce cours doit amener l'étudiant à se responsabiliser face à son processus d'apprentissage, à augmenter sa confiance face aux mathématiques et à se valoriser dans l'effort.

2.2. Les objectifs spécifiques de la séquence d'apprentissage :
-donner la définition d'une matrice, identifier ses éléments (terme général), déterminer ses dimensions,
-identifier différents types de matrices (matrice-ligne, matrice-colonne, matrice
carrée et sa diagonale principale, matrice nulle, matrice identité, matrice inverse, matrice triangulaire, matrice diagonale, matrice transposée,
-identifier les matrices symétriques et antisymétriques,
-évaluer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n (n ‹ 4) suivant une ligne,

ou une colonne,
-évaluer le mineur et le cofacteur d'un élément a_{ij},
-énoncer les principales propriétés d'un déterminant et les utiliser,
-identifier une matrice singulière et une matrice régulière (matrice inversible),
-trouver la matrice.
Cette séquence est difficile pour la consistance des activités d'apprentissage effectuées. Elle est utile en nous montrant tout simplement son efficacité procédurale.

3. Les connaissances préalables

Les annexes 1 et 2 représentent le contenu d'un exercice qui doit être effectué immédiatement et respectivement, sa feuille de correction. En utilisant l'annexe 1, l'exercice proposé pour être résolu, représente une évaluation formative des acquises de l'apprenant. L'exercice est donné dans le but que l'étudiant observe la différence entre une matrice et un déterminant ainsi le fait qu'on parle d'un déterminant attaché d'une matrice seulement pour une matrice carrée. Mes corrections suivies de mes explications aident l'étudiant pour élucider les problèmes rencontrées.
Les annexes 3 et 4 constituent un contrôle rigoureux de l'étudiant pour les notions théoriques apprises, ainsi qu'un exemple de schéma représentatif. L'exercice sélectionné dans le but d'une évaluation formative contient des quelques problèmes d'interprétations et des analogies difficiles. De plus, le schéma explique dans une manière précise les concepts mathématiques acquis, en constituant une représentation graphique des connaissances plutôt que des définitions. Aussi, l'exercice donne la possibilité à l'apprenant de s'évaluer spontanément en lui permettant se comparer avec ses collègues.
Les exercices présentés dans les annexes 5 et 7, suivis de leurs résolutions situées dans les annexes 6 et 8, complètent l'aire de contrôle et d'évaluation formative de l'individu. Ils contiennent une vérification pour les acquises du dernier cours. Le degré de difficulté des exercices présentés est en concordance avec les exigences du programme du ministère. Mes explications et observations aux difficultés rencontrées terminent l'étape allouée aux préalables.

4. Le processus d'élaboration.

Pour favoriser l'acquisition de ces connaissances, des processus d'élaboration et d'organisation sont demandés. Pour ces deux processus, j'élabore une stratégie d'enseignement et une stratégie d'apprentissage propre au cours d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle. Plus précisément, les stratégies seront situées parmi les premières notions de leçon, soit sur les définitions et les propriétés des matrices.

Définition 1. : Une **matrice** M, à **m lignes** et **n colonnes** est un **tableau rectangulaire** de (m x n) nombres, rangé ligne par ligne. Il y a m lignes, et dans chaque ligne n nombres.

La matrice M pourra être notée par :

$$M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

ou plus simplement (a_{ij}) i, j, voire $(a_i$, j) si le contexte s'y prête ((ai, j) i, j représentent les éléments de la matrice).

On représente généralement une matrice sous la forme d'un tableau rectangulaire.

Exemple 1. On est représentée ci-dessous une matrice M à coefficients entiers et de dimension (3,4) donc i = 3, j = 4, une matrice en ayant trois lignes et quatre colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Dans cette représentation, le premier coefficient de la dimension est le nombre de lignes, et le deuxième, le nombre de colonnes du tableau. Une matrice pour laquelle le nombre m de lignes est égal aux nombreux n de colonnes sera dite matrice carrée de la taille n. Une matrice ne comportant qu'une seule ligne et n colonnes est appelée matrice ligne de taille n. Une matrice ne comportant m lignes et une seule colonne est appelée matrice colonne de la taille m. Pour repérer un coefficient d'une matrice, on indique son indice de ligne puis son indice de colonne, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite. Par exemple, on notera a_{ij}, les coefficients de la matrice M, pour 1 ≤ i≤ 3, désignant le numéro de la ligne sur laquelle figure le coefficient envisagé, et 1 ≤ j ≤ 4, désignant son numéro de colonne ; ainsi $(a_{2,4})$ = 7. Ou simplement dit, l'élément, $(a_{ij}) = (a_{2,3})$ (i=2,j=3), est situé dans le tableau qui définit la matrice M, à l'intersection de la deuxième ligne avec la troisième colonne. Alors, cet élément $(a_{2,3})$ est le numéro réel 6.

Un autre élément, par exemple, $(a_{i,j}) = (a_{1,4})$ est le numéro réel 3(situé à l'intersection de la ligne 1 avec la colonne 4).

La disposition générale des coefficients d'une matrice M de taille (m,n) est donc la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Pour effectuer certaines opérations, il peut être utile de travailler sur le système des lignes ou des colonnes d'une matrice. On pourra alors l'écrire sous une des formes suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices à coefficients dans A possédant m lignes et n colonnes est noté Mm,n(A) ou parfois M(m,n,A).

Exemple 2. $M_{1,5}$(A) représente une matrice ligne en ayant une seule ligne et cinq colonnes. $M_{1,5}$(A) = (0 1 2 3 4). Par exemple, l'élément ($a_{1,3}$) est le numéro 2. D'autre parte, $M_{4,1(}$A) représente une matrice colonne en ayant quatre lignes et une colonne. Par exemple $M_{4,1(}$A)= $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$.L'élément ($a_{2,1}$) est le numéro 5, situé à l'intersection de la deuxième ligne et la seule colonne.

Lorsque m=n on note plus simplement Mn (A).

$$M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} \in M_{m,n}(A)$$

et, dans ce cas, la matrice est nommée : carrée.

Exemple 3. Une matrice carrée $M_{3(}$A) de la forme : $\begin{pmatrix} 1-4-1 \\ 00.5-1 \\ 2-3-2 \end{pmatrix}$

a par exemple l'élément : ($a_{2,3}$) = -1, : ($a_{3,1)}$ = 2, etc.

Les éléments situés sur sa diagonale sont respectivement :

($a_{1,1}$) = 1,

($a_{2,2}$) = 0.5,

($a_{3,3}$) = -2.

En général les éléments situés sur la diagonale d'une matrice ont les indices i = j et ils sont de la forme: ($a_{i,i}$), i є N (on parle de la diagonale d'une matrice seulement pour une matrice carrée).

Par la suite on se propose aux étudiants à résoudre un exercice présenté dans l'annexe 10. Organisés en groupe de deux ou quatre, les étudiants essayent trouver les réponses sur trois questions. Cet exercice est donné dans le but de contrôler leur compréhension pour les connaissances déclaratives transmises. Cette façon de vérifier leur compréhension constitue un moyen pour le professeur d'entretenir leur attention à haut niveau et de pronostiquer leur accessibilité aux déclaratives présentées ainsi qu'un diagnostique de leur niveau de compréhensibilité pour les notions acquises. Pour les étudiants, cette vérification lui permet de voir et de reconnaître les difficultés de compréhension de la nouvelle matière présentée, qu'ils se confrontent.

Soit, une matrice $A= (a_{i,\, i})$, carrée, d'ordre n, à coefficients réels. Il est possible de définir le déterminant de la matrice A.

Définition 2. Le déterminant de la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

un numéro réel qui se note fréquemment avec des barres verticales :

$$\det \begin{bmatrix} m_{1;1} & \cdots & m_{1;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n;1} & \cdots & m_{n;n} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1;1} & \cdots & m_{1;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n;1} & \cdots & m_{n;n} \end{vmatrix}$$, ou simplement :

$(a_{ij}) = (m_{ij})$, i = 1, n et j = 1,n , $\forall$ n є N. Une observation immédiate, dit que dans l'écriture, le seul changement fait, consiste dans le type de parenthèse, en passant de la parenthèse ronde à une parenthèse droite ou en utilisant des barres verticales.

Exemple 4. Pour la matrice M = $\begin{pmatrix} 1-4-5 \\ 0-2-7 \\ 2-3-1 \end{pmatrix}$, son déterminant attaché est :

$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -7 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. On copie exactement les éléments en les mettant entre barres.

Dans le but d'apprendre vitement la notion le, déterminant on donne la grille 1. Après deux minutes, on vérifie la réponse en regardant l'annexe 2. En identifiant chaque élément du déterminant, on construit le déterminant.

Exercice 1. Étant donnée la matrice: $\begin{pmatrix} 1-2-4 \\ 0-1-9 \\ 4-3-2 \end{pmatrix}$

Indiquez-vous son déterminant attaché.

Puis, le professeur demande à l'étudiant d'effectuer l'exercice ci-dessous, qui demande d'associer les noms des différentes matrices à leur représentation graphique. L'étudiant n'aura jamais vu les représentations graphiques, mais viendra seulement de se familiariser avec les différentes définitions, par exemple: qu'est-ce qu'une matrice scalaire: une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont identiques. Pour accomplir l'exercice, les étudiants n'ont pas droit à leur livre, mais seulement à leur liste de définitions qu'ils viennent de voir. L'exercice se fera seul et prendra environ dix minutes.

Exercice 2. Veuillez associer les matrices de gauche aux représentations graphiques de droite. Il se peut qu'une matrice trouve plus d'une représentation correspondante.

1. Antisymétrique	a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
2. Diagonale	b. $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Identité	c. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
4. Scalaire	d. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
5. Symétrique	e. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

6. Triangulaire f. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Voir Annexe 3 pour l'Exercice 2 et Annexe 4 pour la grille de correction du professeur. Ensuite, le professeur ramasse les copies et les corrige pour la leçon suivante de façon formative. Il attribue un point pour chaque association réussie par l'étudiant, car même si ce test ne « compte pas », cette note, sur 12 points, apportera une rétroaction à l'étudiant pour le situer dans son apprentissage.

Définition 3. Les mineurs d'une matrice sont les **déterminants** de ses **sous-matrices.**

Ainsi si A est une matrice de taille m par n, on appelle mineur d'ordre k le déterminant d'une sous matrice carrée de taille k obtenue en supprimant m - k lignes et n - k colonnes de la matrice initiale (on a k ≤ min (m,n)). Idéalement, on peut considérer, dès le commencement, notre matrice A de type carré. Si A est une matrice carrée de taille n, les mineurs d'ordre n-1 permettent le calcul du déterminant de A, selon la formule dite de Laplace. En faisant abstraction du signe, ils sont égaux aux cofacteurs.

Exemple 5. Soit, la matrice: $\begin{pmatrix} 1-2-5 \\ 0-1-3 \\ 0-4-2 \end{pmatrix}$, trouvez les mineurs de cette matrice qui ne contiennent pas les éléments de la première ligne.

Les mineurs sont les déterminants d'ordre 2: $\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-4 \end{pmatrix}$.On identifie seulement les mineurs sans que nous fassions leurs calculs.

Le professeur propose aux étudiants d'effectuer l'exercice présenté dans l'Annexe 5 et puis, de confronter leurs productions avec sa grille située dans l'Annexe 6. On leur propose d'identifier les mineurs d'une matrice carrée de taille 4 et de spécifier leur nombre.

Définition 4. On appelle cofacteur A_{ij} d'un élément de matrice a_{ij} d'une matrice carrée le **déterminant** de la **sous-matrice** obtenue en éliminant la colonne et la ligne de cet élément, affecté du signe $(-1)^{i+j}$.

Exemple 6. Soit la matrice ci-dessus : $\begin{pmatrix} 1-2-5 \\ 0-1-3 \\ 0-4-2 \end{pmatrix}$. Trouvez les cofacteurs de cette matrice qui ne contiennent pas les éléments de la première ligne.

Les cofacteurs sont les déterminants d'ordre 2, affectés du signe $(-1)^{i+j}$:

$(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix}$,$(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ et $(-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-4 \end{pmatrix}$. On identifie seulement les cofacteurs sans que nous fassions leurs calculs.

Le professeur propose aux étudiants d'effectuer l'exercice présenté dans l'Annexe 7 et puis, de confronter leurs productions avec sa grille située dans l'Annexe 8. Encore, on leur propose d'identifier les cofacteurs d'une matrice carrée de taille 4 et de spécifier leur nombre.

Faisant une rétrospective avec tous les concepts acquis on demande d'effectuer l'exercice présenté dans l'Annexe 9 avec sa grille de correction située dans l'Annexe 10. La phase d'élaboration finie, on peut passer aux exercices et à la « procéduralisation ». Les applications avec les déterminants, leurs calculs feront le sujet de la « procéduralisation ».

5. Procéduralisation

Cette leçon a comme objectifs d'apprentissage : de bien assimiler le contenu de cette procédure, de se familiariser avec elle et de l'appliquer correctement.

I. Phase d'acquisition

1.0. Afin de favoriser la phase d'acquisition de cette procédure par les étudiants, plusieurs activités seront présentées à travers de la stratégie de procéduralisation. La procéduralisation consiste en « une représentation de ces procédures à suivre », tandis que la phase d'intégration fera agir les étudiants puisqu'ils utiliseront la procédure. Enfin, la phase d'automatisation de la procédure par l'étudiant termine la procéduralisation. Ce type de procédure est utile dans les problèmes d'optimisation des processus de calcul qui font appel à la résolution des systèmes d'équations linéaires.

1.1. Le « modeling »

La première étape de la procédularisation consiste à donner un modèle à suivre aux étudiants pour qu'ils aient la preuve que la procédure fonctionne. Comme modèle, le professeur calculera un déterminant à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur devant les étudiants en leur demandant de ne prendre aucune note, mais d'écouter attentivement. À la fin du problème présenté, l'enseignant reviendra sur les étapes de son cheminement, qui lui ont permis d'arriver au résultat, en indiquant des phrases simples (en bleu). (Pour cet exercice sont prévues environ dix minutes.)

Exemple 1. Soit la matrice : $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Étapes : 1, 2 et 3. Se poser trois questions :

Étape 1. La matrice est-elle carrée ? OUI

Étape 2. Est-ce que la matrice comporte une ligne entièrement nulle ? NON

Étape 3. Est-ce que la matrice comporte une colonne entièrement nulle? NON

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Étape 4 : Choisir une ligne ou une colonne :

Choix de la ligne 1, car il y a un 0.

Étapes : 5 et 6. Trouver les mineurs et les cofacteurs.

$$= 1 \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} + (-4) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$$

Étape 7 : il ne reste plus de matrices (3x3) => on peut résoudre

$= [0.5\ (2) - (-1)\ (3)] + (-4)[0\ (2)-(-1)\ (2)]\ (-1) + 0$

$= 4 + 8 + 0 = 12$

1.2. La procédure écrite

La deuxième étape de la procéduralisation est la procédure écrite. Par la suite, le professeur distribue la procédure aux étudiants, afin que tous puissent l'avoir à la portée de la main lorsque viendra le temps de faire les exercices. La procédure détaillée se lit comme suit :

Calcul du déterminant par la méthode du mineur-cofacteur
1. S'assurer que la matrice est bien carrée. Sinon => pas de Dét.
2. S'assurer qu'il n'y a pas de ligne ou colonne nulle dans la matrice. Sinon => Dét = 0
3. S'assurer qu'il n'y a pas de ligne (ou colonne) qui est le produit d'une autre ligne (ou colonne). Sinon => Dét = 0

4. Choisir la ligne ou la colonne qui est la plus facile à résoudre. Écrire ses éléments.
5. Trouver les mineurs des éléments de cette ligne (ou colonne).
6. Trouver les cofacteurs des éléments de cette ligne (ou colonne).
7. Résoudre : Déterminant = $\sum^{n} élémentX(\mathrm{mineur})Xcofacteur$, où n= dimension de la matrice. Si les mineurs sont encore des matrices (3x3) ou plus grande, à l'étape de résoudre, retour à l'étape 3.

Le professeur lit à haute voix les étapes de la procédure. Cette activité pendra entre trois et cinq minutes.

1.3. La représentation visuelle

La troisième étape de la procéduralisation consiste à donner une représentation visuelle de la procédure écrite. Pour aider les étudiants à bien assimiler le concept de la procédure, le professeur leur demande de faire, individuellement, une représentation graphique de la procédure écrite. Le professeur laisse environ dix minutes aux étudiants afin de compléter leur illustration, puis demande aux volontaires de venir partager leur représentation au tableau (cinq minutes). Cette activité leur permettra de bien visualiser ce qu'ils auront à accomplir comme tâche. On trouve la réponse attendue à l'Annexe 11.

1.4. La représentation mentale

La quatrième étape de la procéduralisation est une représentation mentale. Pour terminer la phase de l'appropriation de la procédure par les étudiants, le professeur demande aux étudiants de se mettre en équipe de deux et de ranger leur procédure. Ils devront réciter la procédure à leur camarade du mieux qu'ils peuvent. Cette activité prendra environ cinq minutes, puis le professeur demandera à un volontaire de venir écrire la procédure au tableau, c'est-à-dire énumérer les sept étapes (cinq minutes). Les autres étudiants seront invités à compléter les manques, s'il y en a.

II. Phase d'intégration

2.1. Pendant cette phase, pour que l'étudiant devienne compétent et pour qu'il doive se familiariser avec la procédure, on essaye un exercice typique. Donc, dans la même période de cours où les étudiants se sont familiarisés avec la procédure, le professeur donne aux étudiants cet exercice au tableau :

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice A, à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur : A = $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Le professeur laisse dix minutes aux étudiants pour que tout le monde puisse commencer les démarches personnelles, donc individuellement, et résout ensuite le problème, au tableau, devant la classe. Il demandera de l'aide aux étudiants à chacune des étapes pour compléter le problème et insistera sur les étapes à suivre.

Il va expliquer chaque opération pour chaque étape. Par exemple :

étape 1 : la matrice est bien carrée, non

étape 2: la matrice a une colonne ou une ligne nulle, non

étape 3: s'assurer qu'il n'y a pas de ligne (ou colonne) qui est le produit d'une autre ligne (ou colonne), non

étape 4 : choisir la ligne ou la colonne qui est la plus facile à résoudre, puis écrire ses éléments, ligne 1

étape 5 : trouver les mineurs des éléments de cette ligne (ou colonne) :

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$

étape 6 : trouver les cofacteurs des éléments de cette ligne (ou colonne) :

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$

étape 7 : résoudre. Déterminant $= \sum^{n} élémentX(\mathrm{mineur})Xcofacteur$, où n = 3 dimension de la matrice :

$= (-1) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} + (-2) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} + (-3) \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$

= (-1) (8) – (-2) (10) + (-3) (21) = -51

III. Phase d'automatisation de la procédure

3.1. Dans cette phase, on donne des conseils en ce qui concerne les modalités et les difficultés d'utilisation de la procédure vue en totalité. Après que les étudiants aient essayé la procédure pour la première fois, le professeur donnera des conseils aux étudiants pour la prochaine utilisation. Maintenant, ils pourront mieux bénéficier des conseils puisqu'ils l'auront essayée une fois. Le professeur demande à la classe de lui donner leurs premières impressions de la procédure. Voici deux exemples de points qui seront soulevés et/ou que le professeur soulèvera :

1. Les trois premières étapes sont communes pour toutes les méthodes de calcul du déterminant, c'est-à-dire non seulement pour la méthode du mineur-cofacteur, mais Cramer par exemple. Alors, ces étapes sont déjà apprises par l'étudiant, il ne faut pas penser qu'il s'agit de nouvelles étapes. (à faire cette remarque.)

2. Matrices de cofacteurs, exemple 3X3 : $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

L'étape 6 peut être représentée par une matrice, alors pour les élèves plus visuels il sera plus facile de trouver les cofacteurs avec cette représentation, ce raccourci.

3.2. Aussi, le professeur mettra les étudiants en garde contre les principales difficultés de cette procédure, soit : oublier de multiplier par le cofacteur ou par les éléments de la ligne (ou colonne) choisie. En effet, la majorité des erreurs surviennent lorsque les étudiants sautent une étape, soit en pensant qu'elle n'est pas utile ou tout simplement en allant trop vite. Il est donc important de mettre en garde les élèves qu'ils doivent absolument faire toutes les étapes de la procédure, sinon le calcul du déterminant ne sera pas bon. Aussi, lors de l'emploi du « raccourci » de la matrice des cofacteurs, il faut l'appliquer avec soin, puisqu'un négatif en moins ou en plus et le résultat complet sera biaisé. L'enseignant et les étudiants pourront échanger sur la procédure pendant une quinzaine de minutes.

3.3. Dans la résolution de la procédure peuvent apparaître.divers situations. Bien préparés avec des conseils en poche, les étudiants sont prêts à tenter l'application de la procédure dans diverses situations, soit trois exercices. Ils seront invités à se mettre en équipe de deux étudiants pour résoudre les problèmes. D'abord un premier exercice où la troisième étape de la procédure ne sera pas respectée, donc que le déterminant vaut automatiquement zéro. Ensuite, un deuxième exercice qui sera une matrice 4X4 où il restera des matrices 3X3 à l'étape 6, donc l'étudiant devra bien lire sa procédure et revenir à l'étape 3 une deuxième fois. Puis, un troisième exercice qui sera une matrice 5X5 qui sera imposante par sa grandeur, mais pas plus ardue à résoudre, si l'étudiant emploie bien la procédure. Ici, l'étudiant devra bien appliquer la matrice des cofacteurs, s'il aime ce raccourci visuel. Une feuille avec les trois exercices sera distribuée à chaque équipe.

Exercice : Calculer le déterminant des trois matrices, à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur:

1) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Le professeur laissera environ vingt minutes aux équipes pour compléter leurs calculs, puis demandera à un volontaire pour chaque matrice de venir faire la résolution au tableau. Les autres élèves compléteront s'il y a des erreurs. Lorsque les étudiants auront terminé leur démarche au tableau, le professeur fera ressortir les étapes dûment utilisées ou celles qui sont manquantes en guise de rétroaction. Cinq minutes sont prévues pour terminer l'exercice.
L'automatisation de la procédure, aussi appelée l'intériorisation, « consiste à réaliser la procédure plusieurs fois »[1], afin qu'elle devienne un automatisme pour l'étudiant. Pour que les étudiants acquièrent de la vitesse en calculant des déterminants à l'aide de la méthode du mineur-cofacteur ils continueront des exercices en devoir, à la maison : Livre d'Amyotte (voir Média graphie): page 115 #4, #5 a, b, #6 a, b, c et #9 a, b, c, e, f. Les étudiants pourront auto corriger leur devoir puisque les réponses aux exercices figurent à la fin du livre.

6. Connaissances conditionnelles

Lorsque l'étudiant est en présence d'un problème, il se peut qu'il ait le choix entre plusieurs manières pour résoudre. Les connaissances conditionnelles permettent à l'étudiant de déterminer «dans quelles conditions exercer une action ou une stratégie donnée ». Ces connaissances qui concernent le «quand et le pourquoi d'une action […] [sont] de type circonstancié, de type contextuel, de type reconnaissance de modèles ». Dans cette section, les connaissances conditionnelles seront vues pour l'ensemble du calcul du déterminant à l'aide du mineur-facteur.

À travers trois phases (la représentation production elle, la contextualisation et l'automatisation), deux stratégies seront utilisées pour favoriser l'acquisition des connaissances conditionnelles, soit la généralisation et la discrimination. La généralisation donnera aux étudiants des occasions de «répondre de la même manière à des stimuli différents ». À l'opposition, la discrimination apprendra à l'étudiant « le nombre de situations auxquelles s'applique la même action ».

L‘enseignant demande aux étudiants de regarder la procédure écrite et d’identifier toutes les conditions essentielles qui doivent être appliquées pour le calcul du déterminant, spécialement les conditions pour lesquelles

Dét = 0. Les étudiants remarquent les conditions différentes en les énumérant :

1) s’il y a une ligne dont tous les termes sont nuls,

2) s’il y a une colonne dont tous les termes sont nuls,

3) s’il y a deux lignes en ayant les termes proportionnels,

4) s’il y a deux colonnes en ayant les termes proportionnels,

alors résulte la même action, Dét=0. Pour que les étudiants maîtrisent facilement la généralisation, le professeur présente autres exemples.

Exemple 1. Indiquer la valeur du déterminant en expliquant le résultat :

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & +4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -9 & 10 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Les étudiants indiqueront pour chaque déterminant la même valeur zéro parce que :

a) la première ligne du déterminant contient tous les termes nuls,

b) la première colonne du déterminant contient tous les termes nuls,

c) les lignes 2 et 3 contient termes en situant dans un rapport de directe proportionnalité parce que les termes (2, 4, 6) de la deuxième ligne sont obtenus par la multiplication des termes (1, 2, 3) de la troisième ligne avec le numéro 2,

d) les colonnes 2 et 3 contient termes en situant dans un rapport de directe proportionnalité parce que les termes (10, 4, 2) de la deuxième colonne sont obtenus par la multiplication des termes (5, 2, 1) de la troisième colonne avec le numéro 2.

Étant terminée la phase de la représentation « productionelle », le professeur met en évidence la deuxième phase, la « contextualisation ».

Une question importante que le professeur demande aux étudiants l’examiner, constitue la condition pour que déterminant soit calculé. Il s’agit que la matrice dont on parle soit carrée sinon le calcul du déterminant sera impossible. Donc, le professeur examinera, à l’aide des étudiants, un exemple.

Exemple 2. Indiquer, parmi les exemples ci-dessous, dans lequel on pourra calculer la valeur du déterminant correspondant pour chaque matrice :

a) $\begin{bmatrix} +2-3+1-2 & 0 & 0 \\ -4-4-4-4 & +7 & -8 \\ -1-2-3-4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & +4 \\ -5 & +8 & -2 \\ +1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Facile à trouver que dans le deuxième cas on a une matrice carrée, par contre, en premier exemple la matrice est de la forme3X6.

Pour fixer les notions acquises, on résout un exercice :

Exercice 1. Indiquez les valeurs des déterminants en expliquant le résultat :

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -9 & 10 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Finalement, l'enseignant en valorisant la discrimination, demande aux étudiants d'observer que la méthode du mineur-cofacteur s'applique, **si et seulement si**, toutes les conditions ci-dessus ne sont pas satisfaites.

7. Conclusion

Le cours Processus d'apprentissage en enseignement supérieur a fait la démonstration, que même dans les cours de mathématiques, l'utilisation de différentes stratégies en classe avait pour objectif de mieux faire apprendre les élèves. En plus, ce travail m'a permis d'élaborer plusieurs activités d'apprentissage qui permet à l'étudiant d'être actif en classe. Je crois donc avoir atteint les objectifs du cours.

Annexe 1.

Exercice 1. Étant donnée la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-2-4 \\ 0-1-9 \\ 4-3-2 \end{pmatrix}$$

Indiquez son déterminant attaché.

Annexe 2.

La réponse de l'**Exercice 1** est : le déterminant attaché,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Observation 1. La matrice est un tableau de valeurs, donc une application bijective tandis qu'un déterminant est un numéro réel.

Le déterminant a un nombre de lignes égal avec le nombre de colonnes. Par contre, une matrice peut avoir un nombre de lignes distinctes du nombre de colonnes. Dans nos cas, on discute seulement de matrices carrées, donc des matrices en ayant le même nombre de lignes et de colonnes pour lesquelles leurs déterminants attachés existent.

Annexe 3.

Exercice 2. Veuillez d'associer les matrices de gauche aux représentations graphiques de droite. Il se peut qu'une matrice trouve plus d'une représentation correspondante.

1. Antisymétrique	a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
2. Diagonale	b. $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Identité	c. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
4. Scalaire	d. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
5. Symétrique	e. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
6. Triangulaire	f. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Annexe 4

Grille de correction pour l'association. Chaque association réussie vaut 1 point.

1. Antisymétrique
2. Diagonale
3. Identité
4. Scalaire
5. Symétrique
6. Triangulaire

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 1 point

b. $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 3 points

c. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 1 point

d. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2 points

e. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 1 point

f. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4 points

Total 12points

Annexe 5

Exercice 3. Soit, la matrice, $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, trouver les mineurs de cette matrice qui ne contiennent pas les éléments de la première ligne.

Annexe 6

La réponse de l'**Exercice 3** :

Les mineurs sont les déterminants de ses sous-matrices.

La réponse : 1) $\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ = 0.5 (2) – (-1) (3) = 1 + 3 = 4.

2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ = 0 (2) - (-1) (2) = 0 + 2 = 2.

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ = 0 (3)- 2 (0.5) = 0 – 1 = -1.

Annexe 7

Exercice 4. Soit la matrice : $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminez les cofacteurs pour chaque élément de la première ligne de cette matrice.

Annexe 8

Le cofacteur Aij d'un élément $a_{\mathbf{ij}}$ d'une matrice carrée est le déterminant de la sous-matrice obtenue en éliminant la colonne et la ligne de cet élément, affecté du signe : $(-1)^{i+j}$

La réponse de l'**Exercice 4** :

1) $\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1}$ = 0.5 (2) – (-1) (3) = 1 + 3 = 4

2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2}$ = [0 (2)-(-1) (2)] (-1) = (0 + 2) (-1) = -2

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{3+1}$ = 0(3)-2 (0.5) = -1

Annexe 9

Exercice 5. Combien des mineurs aurons-nous dans chaque déterminant ci-dessus?

1) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Annexe 10

La réponse de l'**Exercice 5** :

1)3

2) (4) (3) = 12

3) (5) (4) (3) = 60

Annexe 11

Représentation visuelle attendue de la procédure : calcul d'un déterminant par la méthode du mineur cofacteur :